

<https://doi.org/10.24867/JPE-1994-11-057>

ORIGINALNI NAUČNI RAD

Kovač R. \*

## ANALITIČKI METOD ODREĐIVANJA KRIVE HLAĐENJA I BRZINE HLAĐENJA ODLIVKA U INTERVALU TEMPERATURA KRISTALIZACIJE LEGURE

### ANALYTICAL METHOD FOR DETERMINATION OF COOLING CURVES AND COOLING RATES WITHIN INTERVAL OF TEMPERATURES OF SOLIDIFICATION OF AN ALLOY

#### SUMMARY

*In this paper the analytical method for determination of cooling curves and cooling rates in a casting is presented. The type of casting structure is solid solution, which solidifies with low values of  $Bi$  ( $Bi \ll 1$ ) criteria. Relations which define curves are derived by mathematical model of a process of solidification of the casting. The model is based on differential equation of heat conduction and generation of heat (latent heat). Solution of the model is derived by using of variational principle and is presented in analytical and functional form.*

*Function  $\Theta(y, F_0)$  describes temperature field within the wall of a casting. Using this function it is easy to determine cooling curve, cooling rate, temperature gradient, ratio of liquid and solid phase, time of solidification of a casting etc.*

*Paper already presented drawing of cooling curves and cooling rates on the surface and the central area of a casting. It is obvious that mathematical model is successful describing solidification process. Curve of cooling rate of a casting indicates that intensity of cooling is smaller at the beginning then at the end of solidification. This indicates that at the beginning of the process of solidification is generating more significant amount of solid phase, causing generation of great amount of latent heat and suppressing process of cooling.*

---

\* ) Dr Risto Kovač, redovni profesor, Institut za proizvodno mašinstvo FTN, V. Perića-Valtera 2, Novi Sad

## REZIME

Rad prikazuje analitički metod određivanja krive hlađenja i brzine hlađenja odlivka radenog od legure tipa čvrstog rastvora, koja kristališe pri malim vrednostima kriterija Bio ( $Bi \ll 1$ ). Izrazi koji definišu krive dobijeni su rešenjem matematičkog modela procesa očvršćavanja odlivka zasnovanog na diferencijalnoj jednačini provođenja toplote sa toplotnim izvorima. Rešenje matematičkog modela nađeno je korišćenjem varijacionog principa i iskazano je u analitičko-funkcionalnom obliku.

Funkcija  $\Theta(y, F_0)$  opisuje temperaturno polje zida odlivka, ali se na osnovu ove funkcije lako može odrediti kriva hlađenja, brzina hlađenja, temperaturni gradijent, brzina obrazovanja čvrste faze, vreme očvršćavanja odlivka i dr.

U radu je dat grafički prikaz krive hlađenja i brzine hlađenja u centru i na površini zida odlivka. Karakter krive hlađenja pokazuje da matematički model uspešno opisuje proces očvršćavanja. Ovo ukazuje da se na početku procesa očvršćavanja izdvaja veća količina čvrste faze usled čega se oslobađa veća količina specifične toplote kristalizacije, što usporava proces hlađenja.

### 1.0. UVOD

Izučavanje procesa očvršćavanja odlivka putem matematičkih modela omogućava uspostavljanje veza među bitnim parametrima procesa i vršenje analize uticaja pojedinih parametara na taj proces. Za uspešno projektovanje tehnološkog procesa neophodna je teorija koja međusobno vezuje tehnološke parametre, osobenosti procesa formiranja odlivka i njegova konačna svojstva. Iskustvo kazuje da odgovarajuća teorija može biti izgrađena samo pri kompleksnom izučavanju procesa formiranja odlivka korišćenjem teorije provođenja toplote, termodinamike, fizike metala i drugih naučnih disciplina. Na bazi ovih disciplina mogu se postaviti matematički modeli, koji uprošćeno opisuju proces, ali ipak, odražavaju suštinu tog procesa i omogućavaju određivanje bitnih parametara procesa i sagledavanje uticaja tih parametara na proces.

Na današnjem nivou razvoja teorije procesa očvršćavanja odlivka matematički modeli se baziraju na diferencijalnoj jednačini provođenja toplote sa toplotnim izvorima. Rešenja ovih modela mogu se naći u osnovi na dva načina i to: korišćenjem numeričkih metoda i korišćenjem analitičkih metoda. Prve imaju znatno veće mogućnosti, dok su druge ograničenih mogućnosti, ali su pregledne i pogodne za vršenje analiza, što je bitno za inženjersku praksu. U radu je korišćen analitički metod, te je rešenje matematičkog modela iskazano u analitičko-funkcionalnom obliku i predstavlja izraz koji definiše temperaturno polje kao funkciju temperature od dimenzije i vremena.

Naena funkcija korišćena je za odreivanje izraza koji definiše krivu hlaenja, brzinu hlaenja i vreme trajanja procesa očvršćavanja, a može se koristiti i za odreivanje drugih parametara. Brzina hlaenja odlivka predstavlja bitan parametar procesa jer u osnovi uspostavlja vezu između brzine hlaenja i svojstava odlivka iskazanih u prvom redu preko strukturnih karakteristika. Ova veza može se uspostaviti preko rešenja matematičkog modela procesa očvršćavanja i eksperimentalnih rezultata.

## 2.0. FORMIRANJE MATEMATIČKOG MODELA

Matematički opis procesa očvršćavanja odlivka u kalupu treba postaviti tako da model što je moguće realnije odrazi proticanje procesa kristalizacije legure u intervalu temperatura likvidusa ( $T_{lik}$ ) do temperature solidusa ( $T_{sol}$ ). Proces očvršćavanja legure u ovom temperaturnom intervalu protiče tako da po celoj zapremini u rastopljenom livu rastu kristali usled čega se oslobađa toplota kristalizacije. Takav proces očvršćavanja odlivka može se opisati diferencijalnom jednačinom provođenja toplote Furijea sa toplotnim izvorima / 5 /. Za odlivak oblika beskonačne ploče debljine zida  $2X$  jednačina ima oblik

$$\frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c_2 \cdot \rho_2} \quad (1)$$

gde je  $q_v$  - zapreminska gustina toplotnog fluksa od unutrašnjih izvora toplote, raspoređenih u materijalnoj sredini. Za opis procesa očvršćavanja legure u intervalu temperatura kristalizacije prethodna jednačina će se napisati u obliku

$$\frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{L_2 \rho_3}{c_2 \rho_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \quad (2)$$

Fizičke veličine u jednačini su:  $a_2$  - temperaturska provodljivost legure koja očvršćava, u  $m^2/s$  ;

$L_2$  - specifična toplota kristalizacije legure u dvofaznoj oblasti, u  $J/kg$ ;  $c_2$  - specifična toplota legure u dvofaznoj oblasti u  $J/kgK$ ;  $\rho_2$  - gustina legure u dvofaznoj oblasti u  $kg/m^3$ ;  $\rho_3$  - gustina legure u čvrstom stanju u  $kg/m^3$ ,  $\Psi$  - relativna količina čvrste faze u intervalu temperatura kristalizacije ( $T_{lik} - T_{sol}$ ).

Funkcija  $\Psi$  u jednačini (2) je nepoznata veličina i funkcija je temperature  $\Psi = \Psi(T)$  a može se odrediti prema dijagramu stanja konkretne legure, pomoću poznatog

pravila poluge ili pomoću približnih formula datih u literaturi /1, 5/. Ako se funkcija  $\Psi$  izrazi u zavisnosti od temperature  $T_2$  ( $T_{sol} \leq T_2 \leq T_{lik}$ ) iskazuje se u obliku

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T_2} = -\mu \quad (3)$$

gde je  $\mu$  – tempo kristalizacije legure u temperaturnom intervalu temperatura likvidusa i solidusa ( $T_{lik} - T_{sol}$ )

Deljenjem jednačine (3) sa  $d\tau$  ista dobija oblik

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = -\mu \frac{dT_2}{d\tau} \quad (4)$$

prilagođen potrebama jednačine (2).

Toplotna provodljivost legure  $\lambda_2$  koja kristališe u intervalu temperatura kristalizacije naziva se efektivna toplotna provodljivost, a iskazuje se u funkciji relativne količine čvrste faze  $\Psi(T_2)$  u obliku

$$\lambda_2(T_2) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{pri } T_2 > T_{lik} \\ \lambda_1(1 - \Psi(T_2)) + \lambda_3 \Psi(T_2) & \text{pri } T_{sol} \leq T_2 \leq T_{lik} \end{cases} \quad (5)$$

gde je  $\lambda_1$  – toplotna provodljivost tečne faze u W/mK;  $\lambda_3$  – toplotna provodljivost čvrste faze u W/mK. Promena toplotne provodljivosti legure u intervalu temperatura kristalizacije matematički model u osnovi čini nelinearnim, što otežava njegovo rešenje. Međutim, model će se rešiti kao da je ova fizička veličina legure konstantna a zatim će se u rešenju koristiti kao promenljiva veličina.

Formiranje matematičkog modela procesa očvršćavanja zahteva opis zakona odvođenja toplote s površine odlivka ( $x = X$ ) u sredinu u koju se hladi. To se može izraziti zakonom Furie - Njutn, u obliku

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(X, \tau)}{\partial \tau} = \alpha(T(X, \tau) - T_s) \quad (6)$$

Prethodni izraz predstavlja granični uslov trećeg reda, gde je  $T(X, \tau)$  – temperatura na površini odlivka, a  $T_s$  – temperatura sredine u kojoj se odlivak hladi, a  $\alpha$  – koeficijent prelaza toplote iz odlivka u kalup, u  $W/m^2K$ . Koeficijent prelaza toplote  $\alpha$  nije konstantna veličina već se menja u procesu očvršćavanja i hlađenja odlivka i zavisi od više faktora. U radu je vrednost ovog koeficijenta određena prema izrazu /1/

$$\alpha = \frac{\lambda_p}{x_p} \left( \frac{T_l - T_s}{T_l - T_{kms}} \right) \quad (7)$$

gde je  $\lambda_p$  – toplotna provodljivost materijala premaza kokile u W/mK;  $x_p$  – debljina premaza, u m;  $T_l$  – temperatura livenja legure; a  $T_{kms}$  – srednja kaloriometrijska temperatura.

Granični uslov u centralnoj osi zida odlivka ( $x = 0$ ), definiše se iz uslova da se odlivak debljine  $2X$  ravnomerno hladi, odnosno da se sa obe površine odlivka ( $-X$  i  $+X$ ) odvede ista količina toplote, šta znači da nema prelaza toplote iz jedne polovine zida odlivka u drugu, te je

$$\frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Početni uslov zadaje raspored temperature odlivka u funkciji koordinate  $x$  i vremena  $\tau$ . Ako se za početak odvođenja toplote od odlivka u okolnu sredinu uzme vreme  $\tau_0$ , to se raspored temperature po preseku zida odlivka zadaje u funkciji  $f(x)$  tj.  $T_2(x, \tau_0) = f(x)$ . Obično se uzima  $\tau_0 = 0$  i  $T_2(x, 0) = T_0 = \text{const.}$ . Radi lakšeg rešenja matematičkog modela u radu će se uzeti uprošćenje da je temperatura livenja legure  $T_l$  bliska temperaturi likvidusa i da u periodu hlađenja liva do temperature likvidusa nema značajnije razlike u temperaturi po preseku zida odlivka. Drugim rečima hlađenje pregrejanog liva protiče ravnomerno po celom preseku zida odlivka, te u nekom trenutku  $\tau = 0$  po celom preseku liv ima temperaturu likvidusa, pa se početni uslov može napisati u obliku

$$T_2(x, 0) = T_0 = T_{lik} \quad (9)$$

Jednačine (2), (6), (8) i (9), definišu matematički model procesa očvršćavanja odlivka u intervalu temperatura likvidus-solidus, pri vrednostima kriterija  $Bi \ll 1$ . Pri malim vrednostima kriterija  $Bi \ll 1$  ( $Bi < 0,1$ ) može se uzeti uprošćenje da je temperatura po preseku zida odlivka ista i da je  $T_2(0, \tau) \approx T_2(x, \tau) \approx T_2(X, \tau)$ . Ovo uprošćenje korišćeno je pri rešavanju matematičkog modela tako što je u desnoj strani jednačine (6) koja definiše odvođenje toplote od odlivka u sredinu u koju se hladi uzeto  $T(X, \tau) = T(x, \tau)$ .

Konkretni matematički model procesa očvršćavanja odlivka iskazan je preko običnih fizičkih veličina, te se njegovo rešenje u analitičkom obliku iskazuje funkcijom

$$T_2 = f(x, \tau, a_2, \lambda_2, c_2; \rho_2 \alpha, T_s) \quad (10)$$

Nalaženje rešenja matematičkog modela u ovom obliku vezano je s matematičkim teškoćama kao i nepogodnosti funkcije za analizu rešenja. Metodi teorije sličnosti omogućavaju prelaz od običnih fizičkih veličina na bezdimenzione veličine kompleksnog tipa. Prevođenje matematičkog modela u bezdimenzioni oblik i nalaženje njegovog rešenja ima više prednosti: a) skraćuje broj promenljivih veličina; b) - veličine kompleksnog tipa jasnije izražavaju veze, koje karakterišu proces; c) - nove promenljive u suštini su uopštene veličine jer zadate kompleksne veličine mogu biti dobijene kao rezultat beskonačno mnogo različitih kombinacija veličina koje ulaze u taj kompleks. Prelaskom na bezdimenzione veličine rešenje matematičkog modela iskazuje se funkcijom

$$\Theta_2 = f(y, F_0, Bi) \quad (11)$$

gde je:

$$\Theta_2(y, F_0) = \frac{T_2(x, \tau) - T_s}{T_{lik} - T_s} - \text{bezdimezionalna temperatura}$$

$$y = \frac{x}{X} - \text{bezdimezionalna koordinata} \quad (12)$$

$$F_0 = \frac{\alpha \cdot \tau}{X^2} - \text{bezdimezionalni kriterij Furie-a} \quad (12)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot X}{\lambda} - \text{bezdimezionalni kriterij Bio}$$

Matematički model opisan jednačinama (2), (6), (8) i (9) u bezdimenzionom obliku glasi

$$(1 + K_1 K_2 K_3) \frac{\partial \Theta_2(y, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \Theta_2(y, F_0)}{\partial y^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(1, F_0)}{\partial y} + Bi \Theta_2(1, F_0) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(0, F_0)}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$\Theta_2(y, F_0) = 1 \quad (16)$$

gde su  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$  – bezdimenzioni kriteriji

$$K_1 = \frac{\rho_3}{\rho_2} ; \quad K_2 = \frac{L_2}{c_2 (T_{lik} - T_3)} ; \quad K_3 = \mu (T_{lik} - T_s) \quad (17)$$

### 3.0. REŠENJE MATEMATIČKOG MODELA

Rešenje matematičkog modela prikazanog jednačinama (13) + (16) tražiće se primenom varijacionog principa. Profil temperaturnog polja odlivka pretpostaviće se u obliku

$$\Theta_2(y, F_0) = (h - y^2) f(F_0) \quad (18)$$

gde su nepoznate veličine  $h$  i  $f(F_0)$  koje treba odrediti. Iz graničnog uslova (14) i jednačine (18) je

$$h = \frac{(2 + Bi)}{Bi} \quad (19)$$

Imajući u vidu jednačinu (13) Galerkinov integral ima oblik

$$\int_0^1 \left( (1 + K_1 K_2 K_3) \frac{\partial \Theta_2(y, F_0)}{\partial F_0} - \frac{\partial^2 \Theta_2(y, F_0)}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \Theta_2(y, F_0)}{\partial f(F_0)} \cdot dy = 0 \quad (20)$$

Funkcije koje sadrži integral odrediće se iz jednačine (18). Nakon obavljene integracije dobije se jednačina

$$(1 + K_1 K_2 K_3) I_1 f(F_0) - 2 f(F_0) I_2 = 0 \quad (21)$$

Veličine  $I_1$  i  $I_2$  imaju vrednosti

$$I_1 = \frac{4(2Bi^2 + 10Bi + 15)}{15Bi^2} \quad (22)$$

$$I_2 = \frac{2(Bi + 3)}{3Bi}$$

Jednačina (21) je obična homogena diferencijalna jednačina, pri čijem rešavanju je konstanta  $C_2$  određena minimizacijom kvadratnog ostatka. Rešenje jednačine ima oblik

$$f(F_0) = \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \exp \left( - \frac{2I_2}{(1 + K_1 K_2 K_3) I_1} \right) F_0 \quad (23)$$

Unošenjem veličina  $I_1$  i  $I_2$  datih izrazima (22) u jednačinu (23) a zatim unošenjem ove jednačine u (18) dobije se izraz koji predstavlja rešenje matematičkog modela procesa očvršćavanja odlivka, u obliku

$$\Theta_2(y, F_0) = \left( \frac{2 + Bi}{Bi} - y^2 \right) \frac{5 Bi (Bi + 3)}{2 (2Bi^2 + 10Bi + 15)} \exp \left| - \right.$$

$$\left. - \frac{5 Bi (Bi + 3)}{(1 + K_1 K_2 K_3) (2Bi^2 + 10Bi + 15)} \right| F_0 \quad (24)$$

Funkcija  $\Theta_2(y, F_0)$  određuje temperaturno polje odlivka. Korišćenjem ovog izraza mogu se odrediti parametri procesa na osnovu kojih je moguće vršiti opsežne analize procesa očvršćavanja odlivka.

Kriva hlađenja odlivka predstavlja promenu temperature po vremenu u nekoj tački preseka zida odlivka koja se određuje koordinatom  $x$ , odnosno bezdimenzionom koordinatom  $y = x/X$  u jednačini (24). Prema tome izrazom (24) određena je kriva hlađenja odlivka, slika 1.a. Npr. za određivanje krive hlađenja odlivka u centralnoj osi  $x=0$ ;  $y = 0/X = 0$  ili na površini zida odlivka  $x = X$ ;  $y = X/X = 1$ .

Izraz za brzinu hlađenja odlivka u intervalu temperature kristalizacije legure dobije se iz (24) i ima oblik



$$\frac{d \Theta_2(y, Fo)}{d Fo} = \left( \frac{2 + Bi}{Bi} - y^2 \right) \frac{(5 Bi (Bi + 3))^2}{2 (1 + K_1 K_2 K_3) (2 Bi^2 + 10 Bi + 15)^2} \cdot \exp \left| - \right. \\ \left. - \frac{5 Bi (Bi + 3)}{(1 + K_1 K_2 K_3) (2 Bi^2 + 10 Bi + 15)} \right| Fo \quad (25)$$

Uopšteno gledajući vreme očvršćavanja i hlađenja odlivka bitan je tehnološki parametar kako za praksu tako i za vršenje određenih analiza. Vreme očvršćavanja odlivka u intervalu temperatura likvidus-solidus određiće se iz izraza (24) tako što će se eksponencijalni deo izraza razložiti u red i uzeti prvi član i što će se smatrati da je proces očvršćavanja završen kada temperatura u centralnoj osi zida odlivka  $x = 0$  odnosno  $y = 0$  dostigne temperaturu solidusa, tj.  $T_2(0, \tau_2) = T_{sol}$ . Prema tome približno vreme očvršćavanja odlivka određeno je izrazom

$$Fo_2 = \frac{5 Bi (Bi^2 + 5 Bi + 6) / 2 Bi (2 Bi^2 + 10 Bi + 15) - \Theta_2(0, Fo_2)}{(2 + Bi) (5 Bi (Bi + 3))^2 / (1 + K_1 K_2 K_3) 2 Bi (2 Bi^2 + 10 Bi + 15)^2} \quad (26)$$

gde je

$$\Theta_2(0, Fo_2) = \frac{T_{sol} - T_s}{T_{lik} - T_s} \quad (27)$$

$Fo_2$  – bezdimenziono vreme završetka procesa očvršćavanja

Pri određivanju vremena očvršćavanja legure, ukoliko se vrednost kriterija  $Bi$  menja treba uzeti srednju vrednost, kao i srednju vrednost bezdimenzionog kriterija  $K_3$ .

#### 4.0. PRIKAZ KRIVE HLAĐENJA I BRZINE HLAĐENJA

Korišćenjem jednačine (24) i (25) daće se prikaz krive hlađenja i brzine hlađenja legure AlCu 4,5 u intervalu temperatura kristalizacije. Debljina zida odlivka  $2X = 14$  mm. Toplotnofizički parametri legure su: specifična toplota dvofazne oblasti  $c_2 = 1156$  J/kgK; specifična toplota kristalizacije (skrivena toplota kristalizacije) u dvofaznoj oblasti  $L_2 = 380.000$  J/kg; gustina dvofazne oblasti  $\rho_2 = 2706$  kg/m<sup>3</sup>; gustina čvrste faze  $\rho_3 = 2980$  kg/m<sup>3</sup>; toplotna provodljivost tečne faze je  $\lambda_1 = 112$

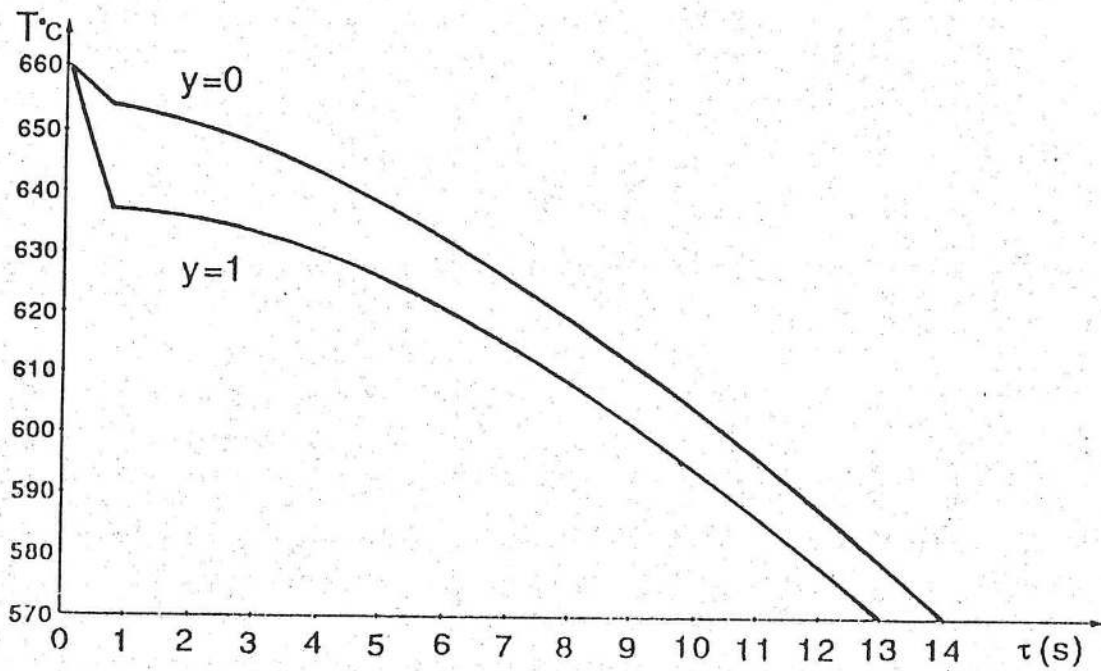
W/mK, a toplotna provodljivost čvrste faze  $\lambda_3 = 217$  W/mK. Temperatura  $T_{\text{lik}} = 650^\circ\text{C}$ ;  $T_{\text{sol}} = 570^\circ\text{C}$ ,  $T_s = 20^\circ\text{C}$ .

Livenje je obavljeno u kokili, koeficijent prelaza toplote s odlivka na kokilu je  $\alpha = 1156$  W/m<sup>2</sup>K, a određen je prema izrazu (7), gde je vrednost srednje kalorimetrijske temperature  $T_{\text{kms}}$  – određena na bazi eksperimenta /1/. Vrednost ovog koeficijenta određena je kada je kalup napunjen livom  $\tau = 0$  ( $F_0 = 0$ ) Kako je relativno kratko vreme od punjenja kalupa livom do trenutka očvršćavanja odlivka (14 s) i relativno mali temperaturni interval ( $\sim 90^\circ\text{C}$ ) to je vrednost ovog koeficijenta uzeta kao konstantna veličina.

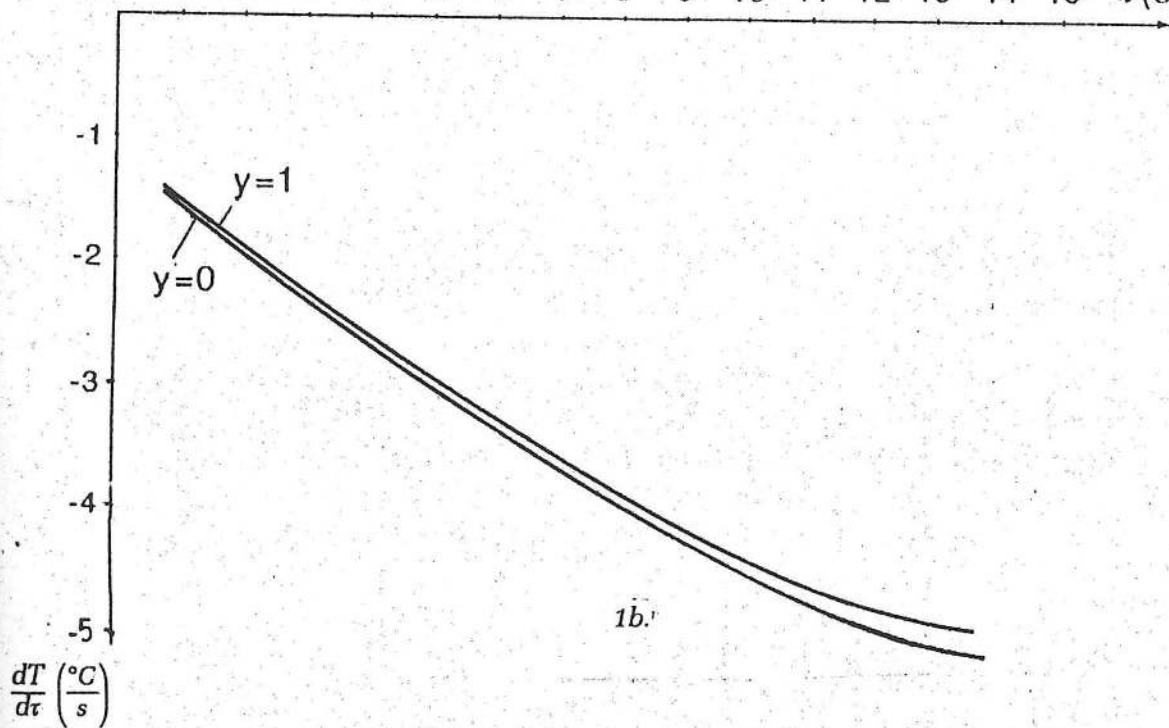
U formulama koje određuju krivu hlađenja odlivka i brzinu hlađenja nalazi se kriterij  $Bi = \alpha \cdot X/\lambda$ , koji je uzet kao promenljiva veličina jer se značajno menja vrednost toplotne provodljivosti legure, koja je određena prema izrazu (5). Vreme očvršćavanja odlivka iznosi 14 s, a korak koji je korišćen u proračunu iznosi 0,7 s, što znači da je ceo temperaturni interval podeljen na 20 koraka. Za svaki od ovih koraka određene su vrednosti tempa kristalizacije  $\mu$ , kriteriji  $Bi$  i  $F_0$  i na osnovu njih određene vrednosti temperature  $\Theta_2(y, F_0)$  i brzine hlađenja  $d\Theta_2/dF_0$ .

Na slici br. 1a, prikazana je kriva hlađenja odlivka, a na slici br. 1b. brzina hlađenja. Prvi deo krive hlađenja koji se odnosi na hlađenje tečne faze od temperature livenja  $T_l = 660^\circ\text{C}$  do temperature likvidusa  $T_{\text{lik}} = 650^\circ\text{C}$ , što iznosi vremenski interval od  $\tau = 0,7$ s nije prikazan na bazi rešenja matematičkog modela, jer je vremenski interval kratak i ne može se iskazati karakter krive hlađenja tečne faze, što za ovaj rad i nema vrednosti, jer se u radu razmatra proces očvršćavanja legure u intervalu temperatura kristalizacije. Prema izrazu (24) određena je kriva hlađenja odlivka u intervalu temperatura kristalizacije. Prema ovom izrazu pri  $\tau = 0,7$ s ( $F_0 = 0,66$ ) temperatura odlivka pri  $x = 0$  veća je za  $4^\circ\text{C}$  od temperature likvidusa što može biti posledica približnog rešenja matematičkog modela ili posledica odstupanja toplotnofizičkih veličina materijala odlivka koje ulaze u matematički model.

Brzina hlađenja odlivka određena je samo u intervalu temperatura kristalizacije prema izrazu (25) i pokazuje da je brzina hlađenja najmanja na početku hlađenja legure u intervalu temperatura kristalizacije, što je posledica intenzivnog obrazovanja čvrste faze a usled toga oslobađanja veće količine specifične toplote kristalizacije. Na prikazanim slikama br. 1a. i br. 1b. postoji izvesna nesaglasnost. Razlika između temperature na površini odlivka  $x = X$  i centra odlivka  $x = 0$  a što nije uočljivo na slici br. 1b., tj. nema bitnije razlike među brzinama hlađenja na površini i centralnoj osi odlivka. Naime, razlika između brzine hlađenja na površini i kontrolnoj osi zida odlivka je skoro konstantna veličina, dok postoji uočljiva razlika između kriva hlađenja na površini odlivka i osi odlivka. Ovo može biti posledica veličine  $a/x^2$  koja je uzeta kao konstantna veličina.



1a.  
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15  $\tau$  (s)



Sl. 1a. kriva hlađenja odlivka  
Fig. 1a. Cooling curves  
Sl. 1b. Brzina hlađenja odlivka  
Fig. 1b. Cooling rates

## 5.0 ZAKLJUČAK

1. Matematički model procesa očvršćavanja odlivka postavljen na osnovu diferencijalne jednačine provođenja toplote sa toplotnim izvorima uspešno opisuje proces očvršćavanja legure tipa čvrstog rastvora.
2. Korišćenje varijacionog principa, (metod Galerkina) pri rešavanju matematičkog modela omogućava dobijanje rešenja u analitičkofunkcionalnom obliku pogodnom za vršenje analize procesa.
3. Rešenje matematičkog modela procesa očvršćavanja odlivka iskazanog preko funkcije  $\Theta_2(y, F_0)$  odnosno  $T_2(x, \tau)$ , omogućava određivanje karakterističnih parametara procesa očvršćavanja kao što su: brzina hlađenja, temperaturni gradijent, brzina zapreminskog očvršćavanja legure i dr.
4. Kriva hlađenja pokazuje da se pri malim pothlađenjima legure ( $T_{lik} - T_{(x,\tau)}$ ) obrazuje relativno velika količina čvrste faze, usled čega se izdvaja velika količina toplote kristalizacije što usporava proces hlađenja legure.
5. Brzina hlađenja određena funkcijom  $d\Theta_2/dF_0$  pokazuje da nema značajne razlike između brzine hlađenja na površini zida odlivka i u centralnoj osi i da je brzina hlađenja znatno manja na početku nego na kraju procesa očvršćavanja legure, a što je posledica izdvajanja toplote kristalizacije.

## 6.0. LITERATURA

1. Kovač, R.: *Uticao mehaničkih oscilacija na formiranje strukture legure aluminijuma*. Doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.
2. Kovač, R.: *Rešenje matematičkog modela procesa zapreminskog očvršćavanja odlivka varijacionom metodom*. Zbornik radova Instituta za proizvodno mašinstvo br. 3 Novi Sad, 1986.
3. Kovač, R.: *Određivanje koeficijenta prelaza toplote u sistemu odlivak-kalup*. Zbornik radova Instituta za proizvodno mašinstvo, br. 1, Novi Sad, 1984.
4. Kovač, R.: *Tehnologija izrade odlivaka*, Novi sad, 1991.
5. Balandin, G. F.: *Formirannije kristaličeskoga stroenija otlivok*. Mašinstroenie, Moskva 1973.