UDK 621.7

YU ISSN 0354-6446

Časopis PROIZVODNO MAŠINSTVO

Godina 11 Novi Sad, 1994. god. Broj 1-2

https://doi.org/10.24867/JPE-1994-11-023

PRETHODNO SAOPŠTENJE

**Gojković D., Banjac D. ***

# DINAMIČKO PROGRAMIRANJE U OPTIMIZACIJI IZBORA I OPTEREĆENJA MAŠINA ALATKI U POGONSKIM USLOVIMA

# DYNAMIC PROGRAMMING IN OPTIMIZATION OF LOAD SELECTION FOR MACHINE TOOLS IN MANUFACTURING ENVIRONMENT

**Summary**

*The required levels of manufacturing and economic effects in manufacturing systems in modern metalworking industry can be attained by design and optimization of technological and manufacturing processes and their rational implementation in manufacturing environment. In order to improve productivity and cost effectiveness, special importance is attached to implementation of appropriate systems and methods for techno-economical optimization among which is the dynamic programming method.*

*Based on the results of a wider research in optimization of technological solutions, this paper reviews a part of results pertaining to implementation of dynamic programming of optimal production control restricted to optimal utilization of available equipment.*

*) Gojković Donka, asistent pripravnik, Banjac mr Dragan, predavač, IPM, FTN, Novi Sad, V. Perića Valtera 2

**Rezime**

*Potrebni nivoi proizvodno-ekonomskih efekata u proizvodnim sistemima industrije prerade metala u savremenim uslovima mogu se ostvariti projektovanjem i optimizacijom tehnoloških i proizvodnih procesa i njihovom racionalnom realizacijom u konkretnim proizvodnim uslovima. Zbog toga je od posebnog značaja primena odgovarajućih sistema i metoda tehnoekonomske optimizacije, među koje spada i metod dinamičkog programiranja, za podizanje proizvodnosti i ekonomičnosti u proizvodnji.*

*Na osnovu rezultata širih istraživanja optimizacije tehnoloških rešenja, u radu koji se prezentira, iznosi se deo rezultata koji se odnosi na primenu metoda dinamičkog programiranja u definisanju podloga za optimalno upravljanje proizvodnjom, u delu koji se odnosi na izbor i optimalno iskorišćenje raspoložive tehnološke opreme.*

## 1.0. UVOD

Pred savremene proizvodne sisteme industrije prerade metala postavljaju se složeni i odgovorni zadaci, čije rešavanje zahteva permanentno razvijanje i prilagođavanje proizvodnih, odnosno tehnoloških procesa, naročito u uslovima nižih tipova proizvodnje i promenljivih proizvodnih programa, kakvi su u većini domaćih proizvodnih sistema. Da bi se ova problematika mogla sagledati i rešiti, neophodno je pristupiti racionalizaciji i automatizaciji tehnološke pripreme proizvodnje, racionalizaciji, automatizaciji i optimizaciji tehnoloških procesa i sistema obrade i montaže, uz optimalno upravljanje proizvodnjom, i primeni savremenih visokokvalitetnih i visokoproizvodnih obradnih sistema, prvenstveno fleksibilnih.

Zbog toga su u Institutu za proizvodno mašinstvo (IPM), kao rezultat rešavanja navedene problematike, razvijene metode automatizovanog projektovanja i optimizacije tehnoloških procesa i operacija obrade [1,2,8]. Na osnovu tako projektovanih procesa za zadati asortiman i količine delova i konkretnu raspoloživu opremu u proizvodnji, uz ostvarenje potrebnih nivoa tačnosti, proizvodnosti i ekonomičnosti, traži se visok nivo fleksibilnosti i mobilnosti proizvodnje, posebno kratki rokovi isporuke, odnosno što je moguće kraći tehnološki i proizvodni ciklusi. U navedenim istraživanjima, između ostalog, traže se i rešenja za ekonomičnu realizaciju obrade u konkretnim proizvodnim uslovima, dakle podloge za optimalno upravljanje proizvodnjom. U okviru toga, iz širokog spektra metoda optimizacije, nametnuo se kao mogući racionalan metod dinamičkog programiranja za traženje optimalnih rešenja u proizvodnji, odnosno njenih odgovarajućih segmenata.

U ovom radu se na osnovu izvršenih istraživanja iznosi deo rezultata, koji se odnosi na primenu metoda dinamičkog programiranja u izboru i racionalnom opterećenju mašina alatki u konkretnim proizvodnim uslovima, na bazi projektovanih tehnoloških procesa i raspoložive tehnološke opreme. Pri tome se prvo ističu osnove i mogućnosti primene dinamičkog programiranja.

## 2.0. OSNOVI METODA DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA

Dinamičko programiranje se može definisati kao metod optimizacije višeetapnih procesa, odnosno kao metod matematičkog programiranja kojim se efikasno rešavaju izvesni specijalno struktuirani problemi određivanja ekstremuma realne funkcije više promenljivih, čiji argumenti uzimaju vrednosti iz unapred date oblasti [4,6,7].

Ako objekat optimizacije zavisi od vremena (neki proces), tj. ako se njegova optimizacija izvodi u više sukcesivnih etapa, u više vremenskih perioda, čime se postiže optimizacija procesa u celini, tada je reč o višeetapnim problemima koji se mogu rešavati metodima dinamičkog programiranja. Ovakvih višeetapnih procesa ima vrlo mnogo u tehnici i tehnologiji, pa su , stoga, i posebno značajni metodi dinamičkog programiranja pomoću kojih se, dakle, optimiraju tokovi ovakvih procesa [7].

Metod dinamičkog programiranja je efikasan kad su u pitanju problemi male dimenzionalnosti, tj. kada je broj promenljivih koje se pojavljuju u problemu mali. U slučaju da je dimenzionalnost problema veća, metod dinamičkog programiranja se ne primenjuje u svom standardnom obliku, već je svaki problem u izvesnoj meri istraživački. Tada je neophodno naći određene modifikacije u postupku dinamičkog programiranja kojim će se redukovati obim proračuna i količina međurezultata koji se moraju pamtiti. Međutim, nemoguće je dati precizan opšti odgovor kada je jedan problem takve dimenzionalnosti da je moguća standardna primena dinamičkog programiranja, a kada su potrebne modifikacije dinamičkog programiranja [6].

Dinamičko programiranje ne rešava opšti problem optimizacije koji se sastoji u određivanju ekstremuma realne funkcije više promenljivih, čiji su argumenti uslovljeni jednačinama i podvrgnuti ograničenjima definisanim nejednačinama, ali je klasa problema optimizacije koji se efikasno rešavaju metodom dinamičkog programiranja velika.

Metodologija dinamičkog programiranja odlikuje se rasčlanjivanjem ili dekompozicijom složenog problema, koji sadrži, uz ostalo, veći broj promenljivih, na niz uzastopnih etapa. Pojedine etape sadrže manji broj promenljivih. Nakon toga se traže optimalna rešenja po etapama, čime se olakšava nalaženje optimalnog rešenja posmatranog složenog problema.

Osnovu dinamičkog programiranja čine dva važna principa. Prvi, koji se naziva princip optimalnosti, izražava se time da "optimalno upravljanje ima osobinu da, bez obzira na početno stanje sistema i početne upravljačke akcije, preostale upravljačke akcije moraju biti optimalne u odnosu na stanje koje je nastalo kao posledica početnih upravljačkih akcija" [6]. Prevođenjem principa optimalnosti na matematički jezik, dobijaju se funkcionalne jednačine, iz kojih se formira algoritam dinamičkog programiranja. Do funkcionalnih jednačina dinamičkog programiranja dolazi se koristeći matematičku tehniku principa invarijantnog uronjavanja, koji predstavlja drugi važan princip metoda dinamičkog programiranja.

Dakle, za praktičnu primenu metoda dinamičkog programiranja potrebno je da svaki razmatrani problem ima svoj jasno postavljen matematički model, sa precizno definisanim ciljem (koji određuje funkciju cilja), koji treba optimirati (maksimizirati, odnosno minimizirati) u okviru ograničenja koja se moraju uzeti u obzir u toku procesa optimizacije. Za ovako postavljen problem, ukoliko zadovoljava uslove koje zahteva primena metoda dinamičkog programiranja, treba naći funkcionalne relacije primenom principa optimalnosti. U izvesnim slučajevima moguće je naći analitičko rešenje, ali se najčešće rešenje nalazi u numeričkom obliku korišćenjem računara.

## 2.1. Dinamičko programiranje u optimizaciji raspodele resursa

Među problemima, za čije se rešavanje može primeniti metod dinamičkog programiranja, može se izdvojiti grupa problema koja se odnosi na raspodelu resursa. Resurse mogu predstavljati novac, mašine, ljudi, sirovine, gorivo, materijali itd. i oni se mogu raspodeliti na različite načine, npr. između više grana proizvodnje i u zavisnosti od toga ostvaruju se različiti ciljevi. Jasno je da je u ovom slučaju sistem skup svih grana proizvodnje; proces je svaki mogući način raspodele resursa; funkcija cilja može da se definiše kao ukupna dobit, koja se dobija kao suma dobiti od pojedinačnih grana, kada se izvrši raspodela resursa. U ovu grupu spadaju problemi raspodele sredstava za kupovinu sirovina, sredstava za rad i radnu snagu pri organizovanju industrijskog preduzeća; problem skladištenja; problem raspodele sredstava između raznih grana proizvodnje, itd. [4].

Proces raspodele resursa, u suštini je raspodela jednog (ili više vrsta) resursa količine R (za druge vrste resursa S, T,...) na **n** aktivnosti, proizvoljno indeksiranih $(i=\overline{1,n})$. Na svaku aktivnost dodeljuje se deo resursa $x_i$, $(i=\overline{1,n})$, i to tako da se na svih n aktivnosti raspodeli cela količina R. Svaku aktivnost karakteriše data funkcija efekta $g_i(x_i)$, $(i=\overline{1,n})$. Ove funkcije pokazuju zavisnost efekta od količine resursa koja se dodeljuje svakoj aktivnosti.

U posmatranom problemu raspodele resursa polazi se od pretpostavki:

- da se efekti svih aktivnosti mere istim jedinicama,
- da je ukupan efekat raspodele jednak zbiru pojedinih efekata,
- da dodeljivanje resursa nekoj aktivnosti ne utiče na efekte drugih aktivnosti.

Na osnovu rečenog, može se dati matematički model optimizacije za slučaj raspodele jedne vrste resursa:

$$
\begin{aligned}
&F(X)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\ldots+g_n(x_n)\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \le R, \qquad x_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,n})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ili dve vrste resursa:

$$
\begin{aligned}
&F(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i,y_i)=g_1(x_1,y_1)+g_2(x_2,y_2)+\ldots+g_n(x_n,y_n)\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i \le S, \qquad x_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,n})\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i \le T, \qquad y_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,n})
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dakle, neophodno je odrediti ekstremum funkcije cilja F(x), odnosno F(x,y) od n promenljivih, u okviru datih ograničenja. Kako je funkcija F(x) separabilnog oblika [4], a funkcije pojedinačnih efekata $g_i(x_i,y_i)$ mogu biti proizvoljnog oblika, to se ovakvi problemi veoma efikasno rešavaju metodom dinamičkog progarmiranja.

Vezu izmedu pojedinih aktivnosti (etapa), u cilju dobijanja ukupnog efekta procesa, uspostavljaju funkcionalne jednačine, čiji je oblik za jednu vrstu resursa:

$$
f_i(R)=\max_{x_i}(g_i(x_i)+f_{i-1}(R-x_i)), \quad (i=\overline{1,n}) \tag{3}
$$

i dve vrste resursa:

$$
f_i(S,T)=\max_{0\le x_i\le S}\ \max_{0\le y_i\le T}(g_i(x_i,y_i)+f_{i-1}(S-x_i,T-y_i)) \tag{4}
$$

Nad funkcionalnim jednačinama (3) i (4) potrebno je obaviti operaciju maksimiziranja po jednoj (3), odnosno dve (4) promenljive, što znatno uprošćava polazni višedimenzionalni problem. Kako se traženje maksimuma jednačina (3) i (4) vrši numeričkim metodima, pretraživanjem sa pogodno odabranim korakom diskretizacije, to se može zaključiti da obim računanja linearno raste sa porastom broja aktivnosti. Stoga je u slučaju velikog broja aktivnosti, a posebno većeg broja vrsta resursa, neophodna primena računara.

Očigledno je da se primena metoda dinamičkog programiranja u raspodeli resursa nameće kao model za izbor i racionalno iskorišćenje raspoloživih mašina alatki za realizaciju zadatog skupa operacija obrade delova, što se dalje iznosi.

## 3.0. IZBOR I RASPODELA OPTEREĆENJA MAŠINA ALATKI

### 3.1. Postavka problema

Kao jedan od čestih problema pri projektovanju i realizaciji tehnoloških procesa obrade, javlja se izbor optimalnih mašina alatki, za realizaciju pojedinih operacija obrade, i optimalno iskorišćavanje njihovih raspoloživih kapaciteta. Težnja je da se raspoloživa oprema (mašine alatke) što ekonomičnije koristi, a proces obrade realizuje u što kraćem vremenskom periodu. Pri tome se posebna pažnja mora posvetiti analizi zadatog asortimana i količina delova koje je potrebno obraditi na raspoloživoj opremi, uz uslove da se izaberu najpovoljnije mašine sa aspekta njihove proizvodnosti i ekonomičnosti, i da se racionalno opterete ukupnom količinom delova.

Iako je opravdano da se izbor mašina i definisanje njihovog opterećivanja vrši na bazi ekonomičnosti obrade (odnosno minimalnih troškova obrade) kao funkciji cilja, usled praktičnih teškoća prikupljanja neophodnih podataka za proračun troškova obrade, može se usvojiti proizvodnost kao pouzdana funkcija cilja, tim pre što se u posmatranom slučaju traže minimalni rokovi isporuke delova, odnosno što je moguće kraći tehnološki ciklusi obrade.

Promenljive veličine $x_i$, $(i=\overline{1,n})$ u (1) predstavljaju količine delova kojima se opterećuje svaka od n raspoloživih mašina alatki.

Funkcija cilja $F_c = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ predstavlja ukupnu proizvodnost procesa obrade. Funkcije pojedinačne proizvodnosti $g_i(x_i) = P_i \cdot x_i$ predstavljaju proizvodnost mašine alatke pri obradi $x_i$ delova ($P_i$ je jedinična proizvodnost mašine alatke). Ovim uslovima je potrebno dodati i odgovarajuća ograničenja koja se prvenstveno odnose na tehnološke mogućnosti obradnih sistema za izvođenje neophodnih operacija obrade.

Funkcionalna jednačina ima oblik (3), odnosno (4), i njenim maksimiziranjem se dobijaju optimalna rešenja operacija obrade na pojedinim obradnim sistemima, a na osnovu funkcije cilja, i konačno optimalno rešenje realizacije procesa obrade.

Šematski prikaz etapa izbora optimalnog rešenja primenom metoda dinamičkog programiranja prikazan je na slici 1. Prikaz primene izloženog matematičkog modela i algoritma dalje se detaljnije izlaže putem rešavanja zadatog konkretnog jednostavnog proizvodnog problema.


*Slika 1. Etape izbora optimalnog rešenja primenom dinamičkog programiranja*

*Fig. 2 Stages in selection of optimal solution by use of dynamic programming*

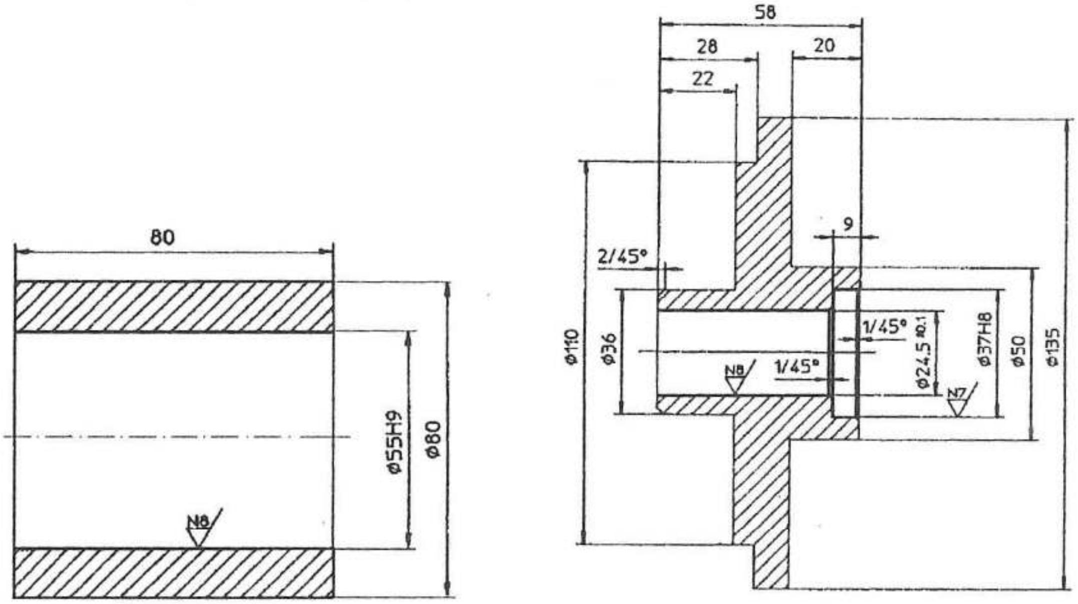
### 3.2. Primena dinamičkog programiranja na konkretnom primeru izbora i opterećenja mašina alatki

Na osnovu zahteva izvršioca, u jednoj manjoj radionici potrebno je izvršiti dve operacije obrade otvora na dva različita dela, otvor $\phi$55H 9 na prvom i $\phi24.5^{\pm0.1}$ i $\phi$37H8 na drugom (slika 2). Ukupna naručena količina prvog dela je 600 komada, s tim da se realizuje u 12 serija po 50 komada, a drugog 750komada u 15 serija po 50 komada. Pri tome je utvrđeno da se pojedinoj mašini pri raspodeli delova za obradu može dodeliti najviše $x_i=5$ serija prvog i $y_i=4$ serije drugog dela. Traženo je da se zahtevane obrade oba dela realizuju u što kraćem roku.

Postavljene zahteve potrebno je realizovati na postojećoj opremi radionice. Pošto je količina raspoložive opreme mala, uzete su u obzir sve mašine alatke na kojima je moguće izvršiti zadate operacije obrade otvora (strugovi i bušilice) i za njih projektovane i razrađene odgovarajuće operacije.

Uzimajući u obzir opterećenost opreme drugim poslovima, i druga ograničenja za realizaciju postavljenog zadatka obrade oba dela , uzete su u obzir sledeće mašine alatke:

1. Univerzalni strug (US)
2. Revolver strug (RS)
3. Horizontalna bušilica-glodalica (HBG)
4. Stubna bušilica (SB)
5. Radijalna bušilica (RB)




materijal: Č.1530; pripremak: šipka

a)

Materijal: SL. 26; pripremak: odlivak

b)

*Slika 2. Skica operacija za: a) prvi deo b) drugi deo*
*Fig. 2 Operation chart for: a) first part b) second part*

Na osnovu detaljno razrađenih operacija za realizaciju obrade na svih pet mašina, dobijeni su neophodni podaci za rešavanje postavljenog zadatka metodom dinamičkog programiranja, koji se grubo ilustruje (tabela 1, gdje je znakom x predstavljena zastupljenost zahvata).

*Tabela 1. Prikaz operacija obrade otvora*

| Za prvi deo (slika 2a) | | | | | | Za drugi deo (slika 2b) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahvat \ Mašina | US | RS | HBG | SB | RB | Zahvat \ Mašina | US | RS | HBG | SB | RB |
| zabušivanje | × | × | × | × | × | grubo struganje ϕ23 | × | × | | | |
| bušenje ϕ25 | × | × | × | × | × | završno struganje ϕ24.5 | × | × | | | |
| bušenje ϕ45 | × | × | | | | proširivanje ϕ24.5 | | | × | × | × |
| bušenje ϕ50 | | | × | × | × | upuštanje ϕ36.7 | | | × | × | × |
| proširivanje ϕ55H9 | | | × | × | × | razvrtanje ϕ37H8 | | | × | × | × |
| grubo struganje ϕ53 | × | × | | | | grubo struganje ϕ35 | × | × | | | |
| završno struganje ϕ55H9 | × | × | | | | završno struganje ϕ37H8 | × | × | | | |
| | | | | | | obaranje ivica 1/45° | × | × | | | |
| | | | | | | upuštanje ivice na ϕ24.5 | | | × | × | × |
| | | | | | | upuštanje ivica na ϕ | | | × | × | × |
| $t_{u1}$ (min) Vreme po komadu | 13.1 | 15.2 | 10.1 | 8.7 | 9.1 | $t_{u2}$ (min) Vreme po komadu | 13.3 | 15.8 | 9.8 | 8.1 | 8.6 |

### 3.2.1. Matematički model optimizacije

Naglašeno je već da se za funkciju cilja usvaja ukupna proizvodnost obrade zadatih raspoloživih mašina, koja zadovoljavaju analizirana proizvodna ograničenja. Ukupna proizvodnost obrade predstavlja zbir pojedinačnih proizvodnosti svake mašine alatke opterećene sa $x_i$ serija prvog dela (slika 2a) i $y_i$ serija drugog dela (slika 2b) i može se prikazati izrazom:

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^{5} f_i(x_i,y_i) = f_1(x_1,y_1) + f_2(x_2,y_2) + f_3(x_3,y_3) + f_4(x_4,y_4) + f_5(x_5,y_5) \qquad (5)$$

gde je $f_i(x_i,y_i)$ - funkcija pojedinačne proizvodnosti i-te mašine alatke za obradu $x_i$ serija prvog dela i $y_i$ serija drugog dela.

Za određivanje maksimuma funkcije cilja (kriterijum optimizacije) potrebno je prvo odrediti pojedinačne proizvodnosti $f_i(x_i,y_i)$ za svaku mašinu alatku i dodeljeni broj serija $x_i$ i $y_i$. Bez bitnog uticaja na konačan rezultat pri izboru mašina i njihovog opterećenja, kao pojedinačne proizvodnosti mogu se uzeti teorijske količine delova izrađene u dve smene, dakle za vreme 7.5·2·60=900 minuta, prema izrazu:

$$f_i(x_i,y_i) = \frac{(x_i \cdot t_{si1} + y_i \cdot t_{si2})}{900} \cdot P_i \qquad (i = \overline{1,5})$$

gde su:

- $t_{si1} = 50 \cdot t_{ui1}$ (tab. 1) - vreme obrade jedne serije prvog dela na i-toj mašini
- $t_{si2} = 50 \cdot t_{ui2}$ (tab. 1) - vreme obrade jedne serije drugog dela na i-toj mašini
- $P_i = 900 / (t_{ui1} + t_{ui2})$ $(i = \overline{1,5})$ - jedinična proizvodnost mašine alatke u dve smene za obradu po jednog komada prvog i drugog dela.

Prema tome matematički model optimizacije iskorišćenja raspoložive opreme u datim uslovima i ograničenjima ima oblik:

$$\begin{aligned} &\max F(X,Y) = f_1(x_1,y_1) + f_2(x_2,y_2) + f_3(x_3,y_3) + f_4(x_4,y_4) + f_5(x_5,y_5) \\ &\sum_{i=1}^{5} x_i = 12, \qquad x_i \le 5 \quad (i = \overline{1,5}) \\ &\sum_{i=1}^{5} y_i = 15, \qquad y_i \le 4 \quad (i = \overline{1,5}) \end{aligned} \qquad (6)$$

Na osnovu izvršenih proračuna po navedenim izrazima za pojedine mašine mogu se dobijeni rezultati prikazati tabelarno (tabela 2).

Jasno je da, na osnovu dobijenih podataka, funkcije pojedinačne proizvodnosti $f_i(x_i,y_i)$ za svaku etapu optimizacije, predstavljaju diskretne vrednosti (tabela 3).

*Tabela 2. Rezultati proračuna*

| R.br | Mašina | Pi (kom/dan) | tsi1 (min) | tsi2 (min) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Univerzalni strug | 34 | 652.5 | 665 |
| 2 | Revolver strug | 29 | 760.9 | 789.4 |
| 3 | Horiz. bušil. glodal | 45 | 502.6 | 489.3 |
| 4 | Stubna bušilica | 53 | 436.1 | 405.8 |
| 5 | Radijalna bušilica | 50 | 454.5 | 432 |

*Tabela 3. Vrednosti funkcija pojedinačne proizvodnosti za petu etapu $f_5(x,y)$*

| x \ y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 23 | 47 | 71 | 95 |
| 1 | 24 | 48 | 72 | 96 | 120 |
| 2 | 50 | 73 | 97 | 121 | 145 |
| 3 | 75 | 98 | 122 | 146 | 170 |
| 4 | 100 | 123 | 147 | 171 | 195 |
| 5 | 125 | 148 | 172 | 196 | 220 |

### 3.2.2. Određivanje optimalne raspodele serija delova

Na osnovu postavljenog matematičkog modela optimizacije (6) i datih tabelarnih vrednosti funkcija pojedinačne proizvodnosti (tab. 2 i 3) treba naći optimalne brojeve serija $x_i$ i $y_i$, kojima treba opteretiti pojedine raspoložive mašine alatke, da bi se ostvarila maksimalna ukupna proizvodnost-maksimum funkcije cilja (5). Metod dinamičkog programiranja omogućava rešavanje ovog problema metodom "korak po korak" [5], čime se posmatrani problem uprošćava i svodi na problem obrade samo jednog dela. To znači da se u prvom koraku treba intuitivno usvojiti početna tačka približavanja, odnosno pretpostaviti optimalno rešenje za jedan deo, npr. prvi ($x_{io}$, $i=\overline{1,5}$ ). Na taj način se problem svodi na optimizaciju rešenja samo za drugi deo, tj. određivanje $y_{io}$, $i=\overline{1,5}$.

Ako se usvoji početno rešenje za prvi deo: $X_o = (x_{1o}; x_{2o}; x_{3o}; x_{4o}; x_{5o}) = (0; 0; 2; 5; 5)$, tada će matematički model optimizacije (6) dobiti oblik:

$$\max F(X_o, Y) = f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) + f_4(y_4) + f_5(y_5)$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 15, \qquad y_i \le 4 \quad (i = \overline{1,5}) \tag{7}$$

Za ovaj korak su pojedinačne proizvodnosti $f_i(y_i)$ izračunate i date u tabeli 4.

Za dati ukupni broj serija drugog dela (S=15) mogu se za svaku mašinu formirati rekurentne relacije prema (6), oblika datog u tabeli 5.

*Tabela 4. Pojedinačne proizvodnosti $f_i(y_i)$*

| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| f1(y) | 0 | 25 | 50 | 75 | 101 |
| f2(y) | 0 | 25 | 50 | 75 | 101 |
| f3(y) | 50 | 74 | 99 | 123 | 148 |
| f4(y) | 128 | 152 | 176 | 200 | 224 |
| f5(y) | 125 | 148 | 172 | 196 | 220 |

*Tabela 5. Rekurentne relacije za drugi deo*

| | |
|---|---|
| Za 1. mašinu | $f_1(S) = \max\limits_{0 \le y_1 \le 4}(f_1(y_1))$ |
| Za 1. i 2. mašinu | $f_2(S) = \max\limits_{0 \le y_2 \le 4}(f_2(y_2) + f_1(S - y_2))$ |
| Za 1., 2. i 3. mašinu | $f_3(S) = \max\limits_{0 \le y_3 \le 4}(f_3(y_3) + f_2(S - y_3))$ |
| Za 1., 2., 3. i 4. mašinu | $f_4(S) = \max\limits_{0 \le y_4 \le 4}(f_4(y_4) + f_3(S - y_4))$ |
| Za 1., 2., 3., 4. i 5. mašinu | $f_5(S) = \max\limits_{0 \le y_5 \le 4}(f_5(y_5) + f_4(S - y_5))$ |

Na osnovu navedenih rekurentnih relacija određuju se optimalna rešenja za svaku etapu i time i konačno optimalno rešenje za svaku mašinu (tabela 6).

Dobijeno optimalno rešenje raspodele 15 serija drugog dela je dakle $Y_o = (y_{1o}; y_{2o}; y_{3o}; y_{4o}; y_{5o}) = (4; 4; 4; 3; 0)$, što daje funkciju ukupne proizvodnosti F(X,Y)=675.

Pošto je pretpostavljeno rešenje za $X_o$ dobijene optimalne vrijednosti za $Y_o$ ne moraju biti optimalno rešenje. Na osnovu principa optimalnosti treba izvršiti dalje korake optimizacije i približiti se optimalnom rešenju ($X_o$, $Y_o$). Potrebno je zato ispitati egzistenciju maksimuma ukupne proizvodnosti (5) u sledećem koraku u kom se polazeći od dobijenog rešenja $Y_o = (4; 4; 4; 3; 0)$ formira novi matematički model optimizacije oblika:

$$\max F(X, Y_o) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5)$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 12, \qquad x_i \le 5 \quad (i = \overline{1,5}) \tag{8}$$